IMAGENS PRODUZIDAS POR HARALD SCHMIDT, CIENTISTA DA COMPUTAÇÃO QUE GEROU OS FRACTAIS A PEDIDO DE PIAUÍ, MAS SEM COBRAR NADA E "POR DIVERSÃO"

$Z \to Z^2 + C$

As nuvens não são esferas nem as montanhas são cones. Era o que pensava Benoît Mandelbrot. Na ânsia de explicar o mundo natural, ele descobriu a função e a beleza das formas impuras e chamou a atenção para um dos objetos mais inesgotáveis da matemática*

por *JOÃO MOREIRA SALLES*

Benoît Mandelbrot morreu no dia 14 de outubro de 2010.[1]
Fosse ele um homem mais fácil de classificar, a frase seria outra: "O matemático Benoît Mandelbrot morreu no dia 14 de outubro passado." Mas aí teríamos de combinar com os matemáticos, muitos dos quais achavam que Mandelbrot "podia ser muitas coisas, menos um deles".

Muitas coisas, de fato, ele foi. O texto que o apresentou como conferencista de um seminário dizia: "Lecionou economia em Harvard, engenharia em Yale, fisiologia na Faculdade Albert Einstein de Medicina..." Aventurou-se na linguística e estudou a oscilação dos preços do trigo. Escreveu sobre a distribuição espacial entre cidades grandes e pequenas. Decifrou o mistério do ruído

aparentemente aleatório das ligações telefônicas, provando que eram inevitáveis e, ao contrário do que pensavam os engenheiros, regulares. Identificou padrões entre terremotos e frequências cardíacas. Terminou a vida como catedrático de matemática em Yale, aos 85 anos, sem jamais ter provado um teorema relevante.

“Deixemos aos outros o trabalho de provar”, talvez pensasse, convencido de que sua intuição lhe era mais do que suficiente. Com um orgulho que muitos chamavam de vaidade exacerbada – fez gestões malsucedidas para ganhar o Nobel em economia, física e química –, disse: “Muitas vezes, quando vejo a lista dos cargos que já ocupei, fico pensando se existo de fato. A intersecção desses conjuntos deve ser vazia.”

Mandelbrot nasceu em Varsóvia, em 1924. O pai era comerciante de roupas, e a mãe, dentista. Em 1936, a família fugiu para Paris, onde o jovem Benoît conviveu com um tio matemático. Com a aproximação dos nazistas, se mudaram para o interior do país. O dinheiro era pouco. Mandelbrot fazia pequenos serviços – aprendiz de artesão ferramenteiro foi um deles – e, por medo de ser denunciado, frequentou pouco a escola naqueles anos. Terminada a guerra, entrou na Politécnica driblando as falhas de formação com o vigor da intuição geométrica. Dado um problema qualquer, imaginava uma forma correlata e jogava com ela na cabeça. Mexia, esticava, dobrava, até que a solução se apresentasse.

Mandelbrot não seria muita coisa sem as formas. A geometria clássica ensina, desde cedo, a domesticar as coisas que nos cercam. Percebemos a montanha como um cone e a lua como esfera. São formas que abstraem o mundo, que escapam dele em direção ao plano ideal, platônico. Mandelbrot via diferente. Diante de uma rocha, perguntava: Mas e as reentrâncias, as lascas? “As nuvens não são esferas”, observou. O mundo não é puro, macio e liso, mas áspero, irregular e descontínuo. As formas clássicas, mais que pobres, eram impotentes para explicar as impurezas.

Era preciso criar uma geometria que soubesse descrever as nuvens e as folhas da samambaia. Tendo de começar por algum lugar, Mandelbrot olhou para o chão. Mais precisamente, para o limite entre a terra e o mar. Em 1967, publicou um artigo, que se tornaria clássico, cujo título perguntava: “Qual o tamanho da costa da Grã-Bretanha?” Lia-se logo no segundo parágrafo: “Uma costa selvagem é extremamente sinuosa, e, por conseguinte, seu comprimento final se mostrará de tal grandeza que não haverá inconveniente prático em considerá-la infinita.”

“Ora bolas”, resmungaria um inglês mal-humorado. Caminhar era um passatempo nacional por aquelas bandas, e não poucos nobres e plebeus haviam dado a volta na ilha. Como não eram eternos e concluíram a excursão, a costa britânica podia ser tudo – selvagem, sinuosa, bela –, mas infinita, não, definitivamente não.

Mandelbrot propôs que se imaginasse uma cena: um homem caminha pelo litoral, sempre o mais perto possível do mar, e a cada passo deixa uma pegada. Quando reencontrar o ponto de origem, a linha que une todas as suas pegadas representará o comprimento da costa. Substitua-se agora o homem por um lagarto. Incapaz de, num só passo, cobrir com suas patas a mesma distância de um passo humano, o bicho terá de levar em conta acidentes que o homem ignorou. Reentrâncias não serão saltadas, mas percorridas. A linha descrita pelo lagarto será mais irregular e mais longa do que a do homem. Mais extensa ainda será a linha da formiga, que perceberá um seixo como relevo,

como caminho a ser vencido.

A costa da Grã-Bretanha não tem um comprimento intrínseco, disse Mandelbrot. A medida do homem é antropocêntrica, uma entre tantas outras.
O comprimento do litoral dependerá do agrimensor, da abertura do compasso – as pernas do homem, do lagarto, da formiga. Será menor a estimativa para o pássaro do que para o cão. Quanto maior o número de obstáculos percebidos, maior a extensão da costa, que, no limite, tenderá ao infinito.

"Qual tamanho tem?" se transformaria, então, em outra pergunta: "Visto de onde?" Visto do espaço, um Fusca é um ponto e tem dimensão zero. Do céu, pode ganhar extensão e ter duas dimensões. Do chão é tridimensional. De mais perto, do ponto de vista da formiga que caminha sobre a superfície lisa do paralama, perde a terceira dimensão, volta a ser um plano. A escala é determinante.

Mandelbrot observou que formas irregulares – o litoral, por exemplo – tinham uma característica singular: sua complexidade não se alterava com a escala. O homem percebia certos recortes, o réptil percebia outros mais e outros ainda o inseto. Mas não era só isso: independentemente da escala, a forma percebida se mantinha substancialmente a mesma, como se cada segmento repetisse o todo.

Essa característica –- a autossemelhança – é o centro da geometria criada por Mandelbrot. O mínimo se parece com o imenso. Uma pequena nuvem é semelhante a uma nuvem grande e ambas obedecem a um princípio organizador único. A natureza está repleta de formas assim, cheias de reentrâncias, segmentos retorcidos, entrelaçados, irredutíveis à suavidade das formas puras. O salto que ele deu foi afirmar que essa é a verdadeira geometria do mundo natural. As irregularidades não são deformações da perfeição clássica, mas o idioma próprio da natureza.

"A contribuição de Mandelbrot para a matemática não foi o seu trabalho mais importante. O principal é que ele mudou a nossa maneira de pensar", diz Marcelo Viana, pesquisador titular do Impa, o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. "Ele viu que as formas puras não explicam o mundo natural, e a ânsia dele era esta: explicar o mundo."

Mandelbrot precisava dar um nome a essas formas selvagens. Uma tarde, em 1975, seu filho chegara da escola e fazia o dever de casa com um dicionário de latim à mão. Folheando o livro, Mandelbrot caiu no adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, "quebrar", "fraturar". Havia achado a palavra adequada: *fractal*.

Até a entrada dos fractais em cena, certos objetos não gozavam de boa reputação entre os matemáticos. Não se entendia para que serviam. Eram patologias lógicas, monstros a serem deixados de lado."Ouvi falar deles num curso de filosofia da ciência, não na faculdade", conta Viana. "O professor dizia: 'Coisas estranhas acontecem na matemática.'"

A curva de Koch era uma dessas bizarrices. Desenha-se um triângulo equilátero. No meio de cada lado, acrescenta-se um triângulo com o terço do tamanho original. A nova figura, uma Estrela de Davi, terá um contorno mais extenso que o triângulo original. Repete-se o processo, agora desenhando dois pequenos triângulos em cada lado das pontas da estrela. Repete-se de novo, e de

novo, e a cada vez o contorno ganha em extensão. É como se fôssemos alterando a escala em que observamos os limites de um mesmo objeto: a cada ampliação, surgem novos triângulos, como novas escarpas surgem na costa da Grã-Bretanha quando a formiga percorre o mesmo chão do homem.

Repetindo-se o processo indefinidamente, a extensão da linha de contorno aumentará ao infinito. Não obstante, nunca ultrapassará a circunferência que limita o triângulo original, ou seja: uma extensão infinita estará contida numa área finita.

Segundo Mandelbrot, a curva de Kochera uma imagem necessária para compreender o mundo da natureza. Não era monstruosa, mas fractal. Suas pontas e zigue-zagues davam uma lição sobre como ocupar eficientemente o espaço. Corpos perfeitos são ineficientes. Brônquios, alvéolos, o sistema capilar, tudo isso é fractal e, portanto, capaz de desempenhar com a máxima efetividade o seu papel biológico.

“Em termos dos recursos do corpo, o sangue é caro e o espaço também”, escreveu o jornalista James Gleick em *Caos*: *A Criação de uma Nova Ciência*. “A estrutura fractal que a natureza imaginou opera com tal eficiência que, na maioria dos tecidos, nenhuma célula está a uma distância de mais de três ou quatro células de um vaso sanguíneo. Mesmo assim, vasos e sangue ocupam pouco espaço, não indo além dos 5% do corpo.”

O que poderia ser apenas a designação de objetos até então desprezados – eles nem tinham nome – revelou-se muito mais do que isso. A palavra *fractal*, cuja origem etimológica é a mesma de “fração” e “fragmento”, tornou-se um conceito poderoso, graças ao fato de se aplicar a objetos dotados de definição clara (todo fractal é autossemelhante), ter abrangência (descreve inúmeros fenômenos naturais) e ser passível de representação matemática.

A beleza de um fractal está em ser uma forma altamente complexa que, não obstante, nasce de um comando único e relativamente simples. Como o princípio gerador é o da autossemelhança, estabelecido o código responsável pela criação de um pequeno segmento, é preciso apenas ordenar que este se reproduza indefinidamente, como se bastassem uns poucos acidentes para formar o litoral de um continente.

Mandelbrot deu nome a um objeto lógico que muitos consideram “o mais complicado da matemática”. Pesquisadores respeitáveis dedicaram a vida a estudá-lo. É um fractal inesgotável, no sentido de que, ao mergulhar em qualquer um de seus pontos, encontra-se sempre um novo continente de formas a ser explorado.

Apesar da complexidade infinita do conjunto de Mandelbrot, a função matemática que o traduz não exige mais do que seis toques do teclado (sem contar os espaços): $Z \rightarrow Z^2 + C$. A função se dá no plano complexo, mas não é preciso compreender o que isso significa. A beleza está nessa brevidade. Apenas se multiplique um número complexo, Z, por ele mesmo e some-se um valor constante. Pegue-se o resultado e refaça-se a conta, retroalimentando o processo centenas de milhares de vezes. O conjuntode Mandelbrot consistirá no conjunto de todos os pontos C que, partindo de $Z = 0$, não escapam em direção ao infinito quando submetidos à função.

Um exemplo simples: elevar sucessivamente 0,5 ao quadrado não leva para o infinito; submeter o número 2 à mesma operação, sim.

Só alguém fora do tempo seria capaz de visitar todos os recantos do conjunto de Mandelbrot. Mesmo Deus, se o visse na sucessão temporal e não de um só golpe, precisaria da eternidade para correr toda a sua complexidade. Nenhuma de suas partes é rigorosamente igual à outra, mas em geral elas guardam semelhanças, como parentes. A cada mergulho em um dos pontos do conjunto, não importa qual, das profundezas, em meio à multiplicidade ininterrupta de novas galáxias de formas, surge um ponto negro que, ampliado, revela-se um lembrete da estrutura total, que conterá outros lembretes, que conterão outros, numa vertigem sem fim.

Na analogia de Gleick, é como se o objeto fosse um planeta e nós, do alto, pudéssemos decidir o que ver dele: o conjunto inteiro ou o tamanho das cidades, dos edifícios, das salas, dos livros, das letras, das bactérias e assim por diante. Em qualquer escala a paisagem será familiar, mas não idêntica, e sempre terá sido gerada – como ocorre com as paisagens de Hollywood, tributárias da tecnologia fractal – a partir das mesmas e poucas linhas de código. A característica sublime do conjunto de Mandelbrot é o fato de ele conter, dentro de si, todas as paisagens de todos os tempos.

Dito ainda de outro modo: é como se com três vogais, duas consoantes e uma regra gramatical simples os matemáticos tivessem escrito não só a *Divina Comédia*, mas toda a literatura que tenha existido e toda aquela que ainda virá.

[1] Artigo reproduzido conforme o original publicado em novembro de 2010.